

構造色の仕組み I. 光の基本的な性質

木 下 修 一¹

大阪大学大学院生命機能研究科 豊中市待兼山町 1 - 1 (〒 560-0043)

Mechanisms of Structural Color I. Fundamental Properties of Light

Shuichi Kinoshita

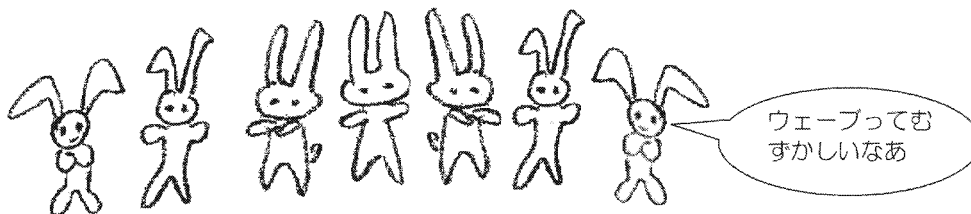
Graduate School of Frontier Biosciences, Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan

概 要

今回から構造色についての連載を行うこととなった。この連載では光の基本的な性質から、構造色の基となっている原理、自然界の構造色の紹介など、原理的なところから応用まで幅広く、かつ、息の長い連載を行っていくつもりである。光の性質をできるだけ易しく書いていくが、大事な公式はできるだけ網羅していくつもりである。もともと高校生向けに書いていた文章に付け足して書いていったので、難しいところと易しいところが混在してしまい読みにくいかもかもしれない。必要なところだけを拾い読みしながら進んでいただければよいと思っている。

1) 波とは

構造色の主人公はもちろん光である。そこで、光とは何かというところから書き始めてみよう。構造色は多分に光が波であることを使っている。そこで、まず、波の性質を表すいくつかの用語を導入してみよう。ポップコンサートやスポーツ観戦の際に良く見られる「ウェーブ」を例にとって波を考えてみよう。「ウェーブ」は物理学でいう波には当たらないかもしれないが、「波」とは何かということを考えるにはちょうど良い題材である。今、観客の一人として多くの観客のなかにいるとしよう。コンサートは盛り上がってきて、そのうち遠くの方から何やら人の動きが見られるようになる。観客は立ったり座ったりして「ウェーブ」を行っている。「ウェーブ」が自分に近付いてきたら、タイミング良く立ちあがろう。そのタイミングは隣の人の動きが合図である。隣の人動き始めたら、少しタイミングをずらして立ち上がってみよう。「ウェーブ」はうまい具合に通り返っていくだろう。ほっとしたのも束の間、また次の「ウェーブ」がやってくる。そのうちだんだん慣れてきて、「ウェーブ」はうまく伝わるようになる。遠くから見ると本当に波のように人の動きが伝わっているのが分かる。



ここでちょっと考えてみると、波は横方向に伝わっていくが、人は横方向には全く移動していないことに気がつく。伝えているのは人が立ち上がって座るという動作だけである。そういえば、海に浮かぶ水鳥だって波に浮かんで上ったり下ったりしているのは見かけるが、ちっとも陸地まで運ばれているようには見えない。このように波はそれを伝えるもの（媒質）は運ばずにその動きだけを伝えていくのである。光は真空中でも伝わるので、光を伝える媒質が真空中にもきっとあるに違いないと考えて、物理学者たちは20世

¹skino@phys.sci.osaka-u.ac.jp

紀初めにその仮想的な媒質に「エーテル」という名前をつけた。その存在を示そうと数々の実験が行われてきたが、ついに見つけることができなかった。その後の研究により、光は空間を歪ませて伝わっていると考えようになってきた。光は波としては特別なものだが、波としての一般的な性質はすべて示す立派な波である。

「ウェーブ」を行う人が隣の人の動きに合わせて精一杯立ち上がってから座ることにしよう。それに釣られてあなたも精一杯立ち上がるとそれが伝わり、全体にメリハリのきいた「ウェーブ」ができるだろう。もし、中腰ほどしか立ち上がらないとするとあまりはっきりした「ウェーブ」はできないかもしれない。波を伝える動きの大きさのことを振幅と呼ぶ。一方、隣の人の動きに素早く反応して立ち上がると波は速く伝わっていく。この伝わる速さが波の速さになる。こんなことはあまりしないだろうが、もし立ち上がる代わりに隣の人の座席に移動してまた戻るような動きをすると、はっきりしないかもしれないが、やはり「ウェーブ」は見られるだろう。波の伝わる方向は同じだが、人の動く方向がまったく異なっている。波の伝わる方向に動く場合を縦波といい、気体や液体中の音波がそれに当たる。一方、直角な方向に動く場合を横波という。横波にも立ったり座ったりする動きと体を前後に動かす場合がある。気体や液体中を伝わる光の場合も同じように横波だが、動きの方向を特に偏光方向といっている。太陽や電球の光はいろいろな方向に振動する横波の集まりで偏光方向が定まっていない（無偏光）が、水面からの反射光や青空などは少し偏った光となっている。また、レーザーの光はたいていの場合偏光している。波の性質を組み合わせると、きっといろいろなタイプの「ウェーブ」ができるだろう。

2) 光の発生

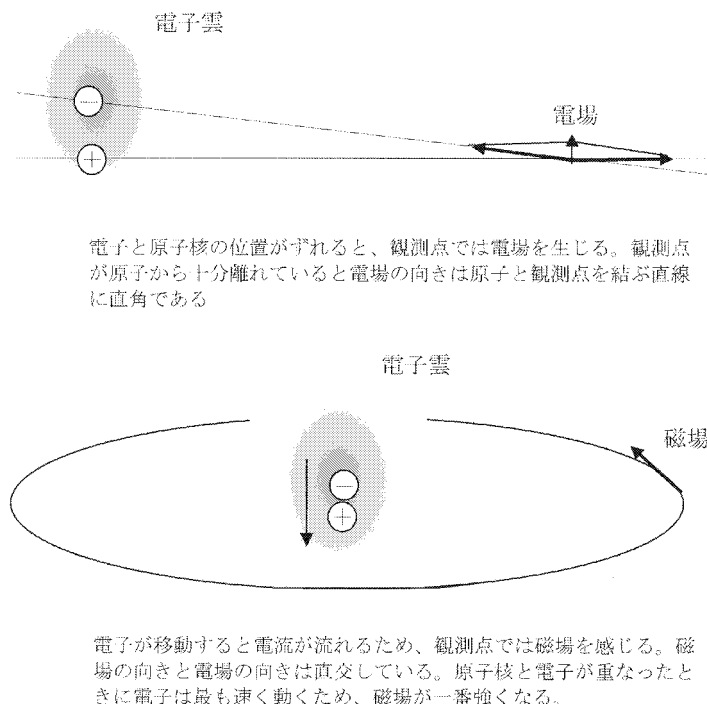


図 1: 電子が振動すると振動する電場と磁場を生じる

光は何から発生するのだろうか。実は、光は荷電粒子の運動から発生しているのである。物体は原子からできているが、原子は原子核と電子から成り立っている。いま、図 1 のように何らかの原因で電子が原

原子核を中心として振動を始めたとする。遠くでその振動を見ていると電子のもつ負電荷と原子核のもつ正電荷の影響で電場を感じる。この電場が図1のように振動にあわせて向きを変える。一方、電子が動くと電流が流れ、電流が流れると周辺に磁場を生じるので、観測点で磁場も感じることになる。磁場の向きは電場に直角である。また、電子がもっとも大きく変位したときに電場は最大になるが、磁場の大きさは0である。一方、原子核と電子の重心が重なったときに磁場が最も大きくなるが、このときは逆に電場は0になる。このように振動する電子を遠くから眺めると、電場と磁場が交互に振動しながら発生していることが分かる。このとき、電子の動きによって発生する電場と磁場の振動が遠方まで瞬時に伝わるとすると、電場や磁場の大きさは距離によって変化するが、距離が遠くても近くても同じように振動してしまうため、波として伝わっていかない。実は、電場や磁場の変化は瞬時に伝わらず、光速 c で伝わっていくと考えるのである。こうすると、原子から遠くの方は変化が遅れて到着するので、波のように伝わっていくのである。これが光の発生に当たる。光は電場と磁場を伴っているので、電磁波と呼ばれている。このように光は真空中で媒質がないにもかかわらず伝わっていくのである。また、図2から分かるように電場や磁場は光の伝わっていく方向に垂直に振動している。このことが、「光は横波である」所以で、また、一般には電場の振動方向を偏光方向と呼んでいる。

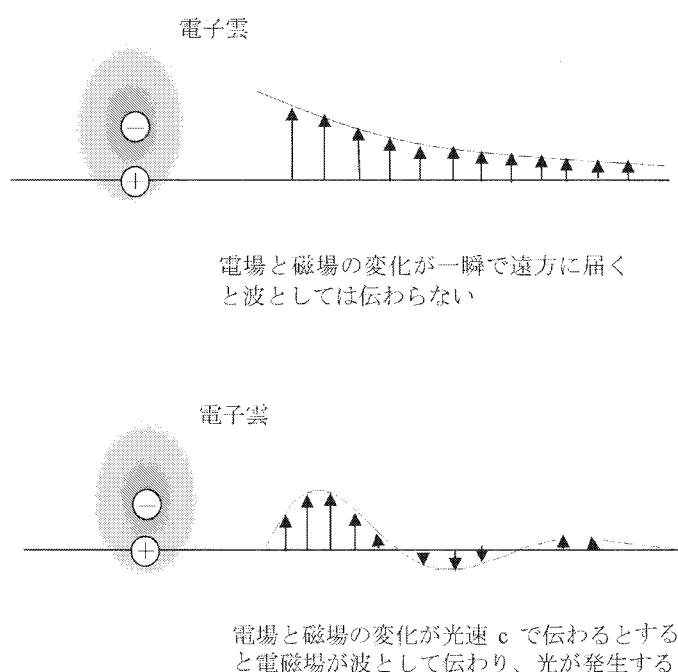
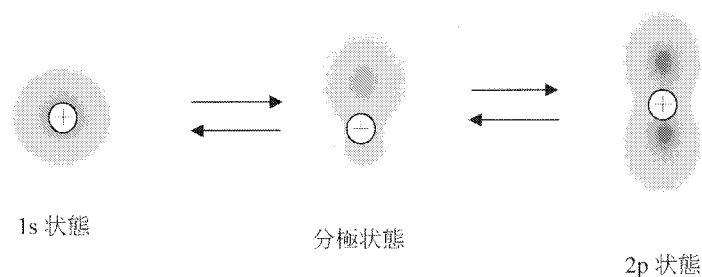
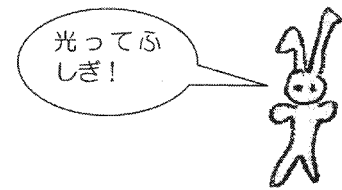


図 2: 電磁波の発生する仕組み

それでは初めに電子を振動させるものは何なのだろう。これには二つの原因がある。一つは外からきた光の電場により振動させられる現象で、これを誘導放出と呼んでいる。もう一つは原子が回りの真空の場（放射場）からエネルギーをもらって自発的に振動する現象でこれを自然放出と呼んでいる。誘導放出はレーザー発振に重要な役割を果たしている。自然放出はわれわれの身の回りのほとんどの光の原因であるが、自然放出現象の説明には量子力学の知識が必要になってくる。原子に影響を及ぼす放射場のエネルギーは零点振動エネルギーと呼ばれていて、原子が真空中にあることで放射場と結合することから生まれてくる。最近、二枚の鏡を接近させて作った微小共振器や誘電体を規則的に並べたフォトリソグラフィ結晶をつくり、この中の放射場を制御して、原子と放射場が結合しないようにする試みがなされている。このようにすると、原子が励起状態にいるにも拘わらず、自然放出ができず、結果として励起状態の寿命が延びることが観

測されている。

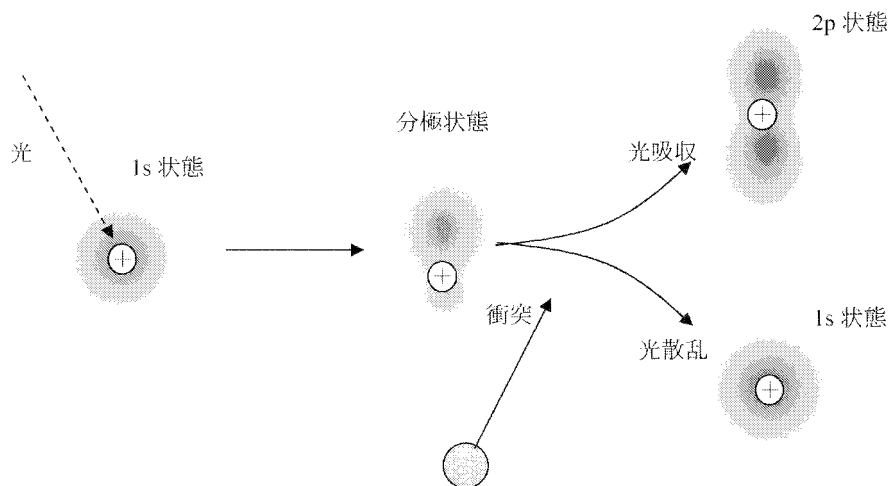
余談であるが、量子力学の世界では光の放出はどのように考えたらよいのだろう。まず、光が存在しないときには原子はその固有状態にあると考える。水素原子でいうと、電子は $1s$ 状態に存在すると考えるのである。この状態は電子雲は原子核を中心に均一に分布している。ここに光が入射されると、光の電場により電子雲に偏りが生じ、上で述べたような電子雲の振動が起きる。電子雲に偏りが生じるということは、もはや電子はその固有状態でなくて、光の存在下での新しい固有状態に移ったということになる。原子の立場でいうと、その状態は $1s$ 状態では表すことができず、他の状態と混じった状態として表されるのである。入射した光が、例えば $1s \rightarrow 2p$ のエネルギー差に近いエネルギーを持っているとすると、すなわち $1s \rightarrow 2p$ 遷移に共鳴するような光の場合は、混じってくる状態はほとんど $2p$ 状態になっている。電子遷移に非共鳴な光の場合だと、 $2p$ だけでなく許容遷移のいろいろな状態が均一に混じってくると考えることができる。いずれにしてもこのように他の電子状態と交じり合った状態は分極状態と呼ばれている（図3）。分極状態を介しないと光を発することができない。したがって、たとえ原子が励起状態にいてもそれは固有状態にいるわけであるから、光を発することはできないのである。原子が放射場と結合していると放射場の零点振動により原子は固有状態からずれ分極状態になり、光を発するのである。ちなみに基底状態に光を当てて放出される光を散乱とよび、励起状態から自然放出によって発せられる光は蛍光と呼んでいる。分極状態にいる原子に放射場との結合を邪魔するような現象、例えば、他の原子の衝突などがあると、分極状態はくずれていく。分極状態は基底状態と励起状態とが混じった状態なので、くずれるときは基底状態か励起状態のいずれかの状態に移ることになる。入射した光が電子遷移に共鳴している場合は半々の確率で、その他の場合は混じり方によるが大体が基底状態に移ってしまう。基底状態にもともといた原子が励起状態に移る場合を光が吸収されたと呼び、励起状態に移る割合が吸収量となる（図4）。光の振動数を変化させながら励起状態に移る割合を測定すると吸収スペクトルが得られる。



$1s$ 基底状態と $2p$ 励起状態の間を行き来するには必ず分極状態を通る。この分極状態を介して光が吸収されたり、放出されたりする。

図 3: 光の吸収と放出の過程

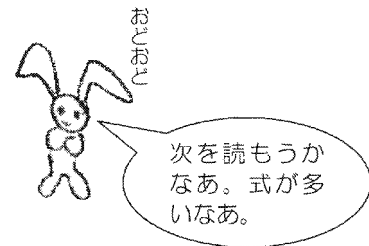
3) 波を式で表す



1s 基底状態に光が当たると分極状態ができる。この状態は励起状態である 2p 状態と 1s 状態の重ねあわせでできた状態でこれだけでは光の吸収は起きない。分極状態にいる原子に別の原子が衝突するなどして、分極状態を壊すと励起状態にいたり、基底状態に戻ったりする。前者を光吸収、後者を光散乱と呼んでいる。

図 4: 光吸収の原理

次に式を用いて波を表現してみよう。座標軸の x 軸方向に $u(x)$ で表される「形」があるとしよう(図 5)。この「形」が速さ v で x 軸の正の方向に伝わっていくとすると、 $t=0$ に $x=0$ にあった部分は t 秒後には $x=vt$ で表されるところに移動しているはずである。 x 軸の他の部分 $u(x)$ も同様に移動するので、これを式で表すと、移動する「形」を $u(x-vt)$ で表すことができる。 x 軸の負の方向に動く「形」は $v \rightarrow -v$ と置き換えればよくて、 $u(x+vt)$ で表すことができる。正の向きと負の向きに共に動く「形」を表す方程式を作るために、この関数を x と t でそれぞれ微分してみよう。このとき、一方の変数で微分をするときにはもう一方の変数を定数とみなして微分を行う。このことを示すために、 ∂x とか ∂t というような偏微分の記号を用いる。つまり、



$$\frac{\partial u(x-vt)}{\partial x} = u'(x-vt), \quad \frac{\partial u(x-vt)}{\partial t} = -vu'(x-vt)$$

となる。ここで、 $u'(x-vt)$ は、 $u(x)$ を x で微分したのち $x \rightarrow x-vt$ で置き換えたことを意味している。上の二つの式をまとめると

$$\frac{\partial u(x-vt)}{\partial t} = -v \frac{\partial u(x-vt)}{\partial x}$$

となる。負の方向に進む形に対しては

$$\frac{\partial u(x+vt)}{\partial t} = v \frac{\partial u(x+vt)}{\partial x}$$

となる。微分方程式としてみると右辺の v の前の符号が異なっているだけである。正方向に進む「形」と負方向に進む「形」を共に表す式を作るには、もう一度微分すればよい。正方向に進む「形」で行えば、

$$\frac{\partial^2 u(x-vt)}{\partial x^2} = u''(x-vt), \quad \frac{\partial^2 u(x-vt)}{\partial t^2} = v^2 u''(x-vt)$$

となり、 v の前の符号は消えて、正方向と負方向の式は一緒になり、

$$\frac{\partial^2 u(x \pm vt)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x \pm vt)}{\partial x^2}$$

となる。この式が波動方程式で、 $u(x - vt)$ と $u(x + vt)$ がその解ということになる。

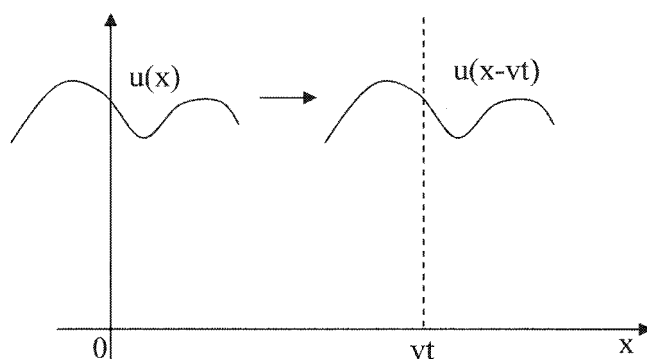


図 5: 波動の伝播を式で表す

繰り返される波は三角関数を用いて書くことができる。空間的な繰り返し周期を波長と呼び λ と書くと、三角関数では $\sin(2\pi x/\lambda)$ あるいは $\cos(2\pi x/\lambda)$ のように書くことができる。この関数が v の速さで x 軸の正の方向に進むとすると、上で述べたように、 $u(x) = \sin(2\pi x/\lambda)$ と書き、 $x \rightarrow x - vt$ とおけば良いから、

$$u(x - vt) = \sin[2\pi(x - vt)/\lambda] \equiv \sin(kx - \omega t)$$

と表すことができる。ここで、 $k \equiv 2\pi/\lambda$ を波数、 $\omega \equiv 2\pi v/\lambda$ を角振動数と呼んでいる。波を表す式

$$u(x, t) = u_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$

がどのような波を表しているかは図 7 をみると分かる²。まず、時間をとめて、時刻 $t = 0$ での波形を見てみよう。原点 ($x = 0$) で波が少しずれているが、これは上の式で ϕ が入っているためである。 $kx - \omega t + \phi$ を位相といっている。従って、 ϕ は原点における位相のずれを表す。上の式は三角関数だから、 x 軸に沿って、周期が $2\pi/k$ で繰り返される波を表す。この周期 $\lambda = 2\pi/k$ が波長である。波の周期が $2\pi/k$ で表されるので、単位長さあたりの波の数は $k/(2\pi)$ となる。 k を波数と呼ぶ所以である。この式では波の振幅が最大 u_0 から $-u_0$ の間を振動する。

次は場所を決めて、時間を変化させてみよう。このため、 $x = 0$ の場所に注目すると、今度は時間とともに振動する三角関数になるので、周期が $2\pi/\omega$ で繰り返される振動を表す。単位時間にどれだけ振動するかは、その逆数 $\nu = \omega/2\pi$ から求められる。 ν のことを振動数といって、一秒間あたりに振動する回数をいい、その単位を Hz (ヘルツ) で表す。

いま、時刻 $t = 0$ で波のある一点に (たとえば山のピーク) に注目して、この点がどのように動いていくか調べてみよう。図を見ると、時間とともに山は右の方、つまり x 軸の正の方向に少しずつ動いていく様子が分かる。ちょうど 1 周期分、つまり λ だけ動くのにかかる時間は x に λ を代入した $k\lambda - \omega t = 0$ から求められ、 $t = 1/\nu$ となる。これから、波の動く速さは、 $v = \lambda\nu = \omega/k$ となることが分かる。同様に x 軸の負の方向に動く波は

$$u(x, t) = u_0 \sin(kx + \omega t + \phi)$$

² $u(x, t) = u_0 \cos(kx - \omega t + \phi)$ と書いても構わない。 $\phi = \phi' + \pi/2$ とおくと同じになる。

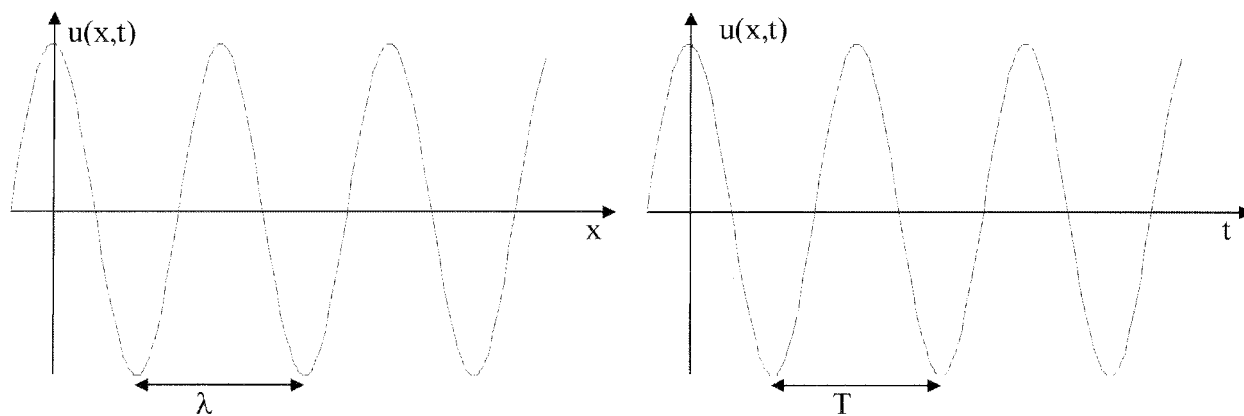


図 6: 波長と周期

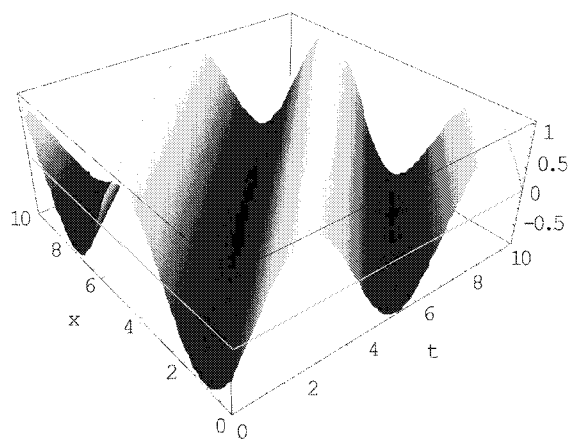


図 7: 波が伝わる様子を三次元で表示。時間 t が経つにつれ、波が x の大きいほうに移動していく様子が見える。

と書ける。

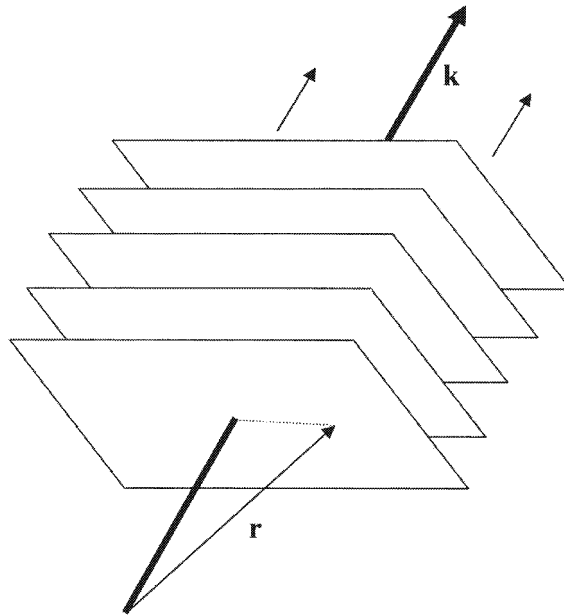


図 8: $\mathbf{k}$ 方向に伝わる波。 $\mathbf{k}$ と $\mathbf{r}$ の内積が一定の平面が波面を形成する。

x 軸の方向ではなく、空間の任意の方向に向かう波は

$$u(\mathbf{r}, t) = u_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)$$

のように表すことができる。 $\mathbf{k}$ を波数ベクトルと呼び、その大きさは $2\pi/\lambda$ になる。また、 $\mathbf{r}$ は位置ベクトルである。この波がどちらを向いて動いていくかは図 8 を見ると分かるが、時刻 t を一定にして考えると、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ が一定になる面が振幅が同じ大きさになる面で、それは波数ベクトル $\mathbf{k}$ に垂直な面になる。この一定の面は時間と共に $\mathbf{k}$ ベクトルに垂直な状態を保ったまま、 $\mathbf{k}$ の方向に進んでいく。 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ が一定の面を波面とよんでいる。この波は空間全体に広がっていて、波面が平面なので平面波と呼んでいる。それに対して、

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{u_0}{r} \sin(kr - \omega t + \phi)$$

とすると、波面が原点を中心とした球になり球面波と呼んでいる（図 9）。

波を表す式にしばしば複素数を用いることがある。複素数を用いると、三角関数同士のやっかいな足し算や掛け算を計算するのにいちいち公式を覚えなくても済むので大変便利である。複素表示では次のような関係式を用いる。

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

例えば、三角関数同士の掛け算は

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \cdot e^{i\phi} &= e^{i(\theta+\phi)} \\ &= \cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi) \end{aligned}$$

となるが、一方、左辺を計算すると

$$(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot (\cos \phi + i \sin \phi) = (\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) + i(\cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi)$$

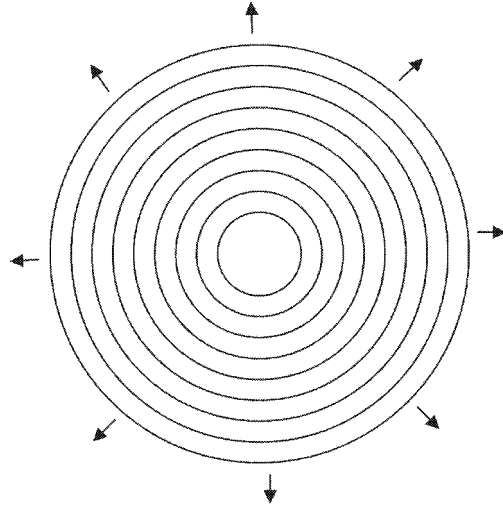


図 9: 球面波

となり、実部、虚部をそれぞれ比較すると

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi, \quad \sin(\theta + \phi) = \cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi$$

のように三角関数の公式が導かれる。複素表示による波の式は

$$u_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t + \phi)} \quad \text{または} \quad u_0 e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t + \phi)}$$

と書くことができる。複素表示ではしばしば、

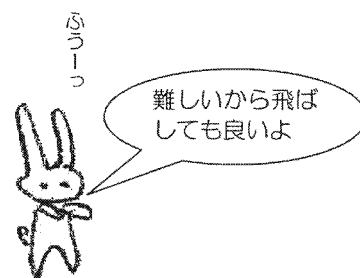
$$u_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)}$$

のように $\exp[i\phi]$ を u_0 の中に含めることも多い。このときの振幅は複素振幅と呼ばれている。複素表示と実数表示の間の関係の表し方は、複素表示の変数を A 、実数表示の変数を a とすると、

$$\begin{aligned} a &= \text{Re} A \\ a &= \frac{1}{2}(A + A^*) = \frac{1}{2}(A + c.c.) \end{aligned}$$

のように書かれる。ここで、 $c.c.$ は複素共役を表す略号 (complex conjugate) である。複素表示は計算するときに大変便利であるが、掛け算が入ると結果に大きな違いを生じるので注意する必要がある。例えば、振幅を自乗するとき実数表示では $\cos^2 \omega t = (1 + \cos 2\omega t)/2$ となるが、複素表示でそのまま自乗すると $[\exp(i\omega t)]^2 = \exp(2i\omega t)$ となり、複素共役との積を計算すると、 $[\exp(i\omega t)]^* [\exp(i\omega t)] = 1$ になり、両方とも結果が違ってくる。計算の中に積が入る場合には、後で述べるサイクル平均の場合を除くと、本来の実数表示に戻って計算することが必要である。

また余談であるが、波にはいろいろな形の波があることはご存知だろう。規則正しく押し寄せてくる波もあれば、津波のように一度に大きな波が押し寄せてくることもある。規則正しい波も良く見れば決して三角関数で表されるような形はしていないものである。こういう波はどう扱ったらよいのだろう。実はどんな波でも三角関数を足し合わせるにより作りあげることができるのである。オーディオで高音部と低音部がどのように分布しているかを示す表示があるが、音の中にどのような振動数の音が含まれているか示したものである。一つの振動数の音は三角関数で表されるようなきれいな周期の波であるが、多くの振動数の波が重なることにより複雑な音楽を奏するのである。このように複雑な波をそれを構成している規則正しい三角関数の波に分解することを、フーリエ分解と呼んでいる。逆に三角関数の波を合成して複雑な波を作り上げることを、フーリエ合成と呼ぶ。複雑な波でもそれが繰り返されているときは、その繰り返しの周期の三角関数が基本となり、その周期 T の $1/2$ 、 $1/3 \dots$ と多くの波を集めることにより、基本的にどんな形の波でも作ることができる。音楽のシンセサイザーの原理である。式で書くと



$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos j\omega t + b_j \sin j\omega t)$$

となり、右辺をフーリエ級数と呼んでいる。ここで、 $\omega \equiv 2\pi/T$ はもとの波の繰り返しを表す角振動数である。 a_j や b_j などの係数は

$$a_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(j\omega t) dt$$

$$b_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(j\omega t) dt$$

で求めることができる。真空中を伝播していく波の場合は $\sin(kx - \omega t) = \sin \omega(x/v - t)$ として、 t の代わりに $x/v - t$ を代入して書いていけばよい。ただし、物質中を伝播する波については波の速さが振動数により変化するので、波が進行するとともに波形が変化していく群速度分散があるので、注意する必要がある。

周期的でない波についてもいろいろな波の集まりとして積分を用いて表すことができる。

$$f(t) = \int \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

ここで、 $\tilde{f}(\omega)$ は振動数の分布を表す関数で、これを求めるには

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int f(t) e^{-i\omega t} dt$$

というような計算を行う。この計算は前者をフーリエ変換、後者をフーリエ逆変換といっている。 $f(t)$ が簡単な関数の場合には数学公式集などで計算結果を知ることができる。複雑な関数の場合には高速フーリエ変換のプログラムで簡単に数値計算を行うことができる。

4) 波のエネルギーと強度

波は媒質を伝えずその動きだけを伝えていく。このとき伝わるのはエネルギーである。波のエネルギーは、ばねのエネルギーと同じで、振幅の自乗に比例した位置のエネルギーと媒質の運動エネルギーの和で書くことができる。単位時間あたりに単位面積を通過する波のエネルギーを波の強さ（強度）と呼んでいる。光の場合には伝える媒質がないので、光の持っている電場と磁場のエネルギーを合わせて、光の存在する空

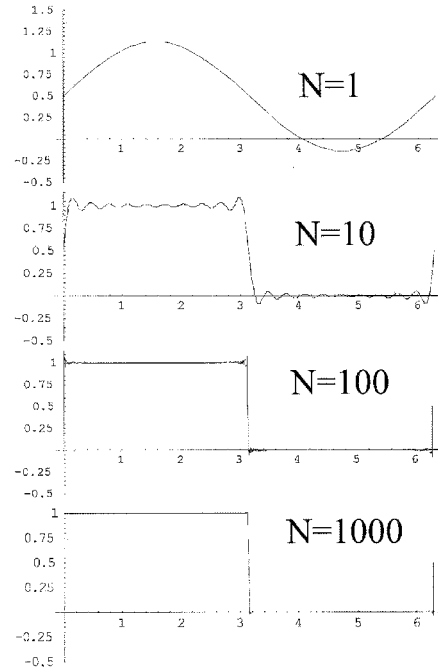


図 10: フーリエ合成の例 ($f(x) = 1/2 + (2/\pi) \sum_{j=1}^N \sin\{(2j-1)x\}/(2j-1)$)。三角関数を N 個集めることで、矩形波が作られていく様子を表す。

間全体で積分したものが光のエネルギーになる。光の振動数は非常に大きいので、どんなに速い検出器をもってきても光の振動を直接見るができない。そこで、光の場合には、通常、サイクル平均という量を用いて光のエネルギーを表している。同じ振動周期をもつ二つの量 $A(t)$ と $B(t)$ の積のサイクル平均を $\overline{A(t)B(t)}$ と書き、振動の一周期を T として、

$$\overline{A(t)B(t)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A(t)B(t)dt$$

として定義される。二つの変数 $A(t)$ と $B(t)$ に共に複素表示を用いると、サイクル平均は

$$\overline{A(t)B(t)} = \frac{1}{2} \text{Re}(A^*(t)B(t))$$

と表される。ここで、 $\frac{1}{2}$ という因子が付くのは図 11 で示すように振動の平均を取ったためである。体積 V 中の光のエネルギーは、光の電場を表すベクトルを $E(t)$ 、磁場ベクトルを $H(t)$ と書くと、

$$\int_V \frac{1}{2} (\epsilon |\overline{E(t)}|^2 + \mu |\overline{H(t)}|^2) dV$$

で表される。また、光強度 I は

$$I = \frac{1}{2} \epsilon c |\overline{E(t)}|^2$$

で表される。ここで、 ϵ 、 μ 、 c はそれぞれ誘電率、透磁率、真空中での光速である。

5) 光の屈折

波が一つの物質から別の物質に入る時の振る舞いについて考えてみよう。上で述べたように物質中での波の速さは $v = \lambda\nu$ で表される。2 種類の物質の中を伝わる波の速さの比を表す量を屈折率といって n と

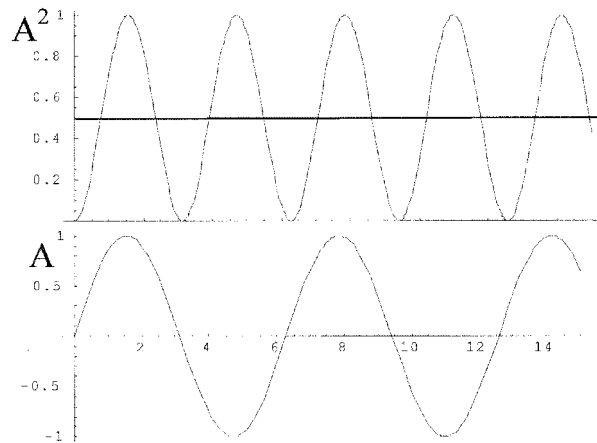


図 11: サイクル平均すると $1/2$ の因子がつく理由を表す。上の図で平均をとると $1/2$ になる。

いう記号で表す。たとえば、 A と B という物質中の波の速さを v_a と v_b で表すと、

$$v_a/v_b = n_{ab}$$

と表される。物質中を伝わる波の振動数は別の物質に入っても変化しないので、速さの変化はまた波長の変化として考えることもできる。つまり、

$$\lambda_a/\lambda_b = n_{ab}$$

となる。光に対しては真空中での速さや波長を基準にして物質の屈折率を決め、単に屈折率と呼んでいる。例えば、 25°C での水の屈折率が 1.333 というのは、水中での光の速さが真空中の $1/1.333$ であることを示している。従って、真空中の光の速さと比較して物質 A と B の屈折率 n_a 、 n_b を決め、

$$n_{ab} = \frac{n_b}{n_a}$$

と表すことができる。

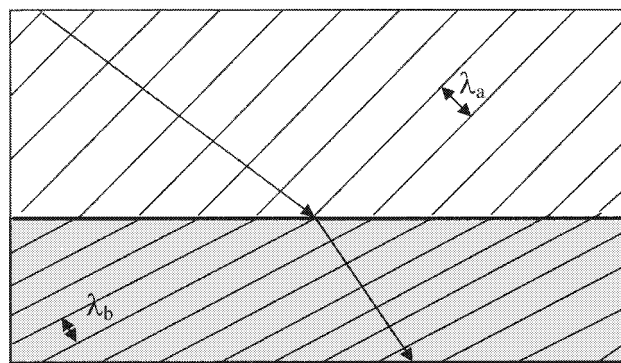


図 12: 屈折率の異なる物質に光が入射するとき、界面で波面が一致するようにするためには波面が界面で曲がらなければならない。

屈折率の異なる物質中で波長が変化することを用いると、波の屈折現象を簡単に説明することができる。図 12 に示すように、物質 A を伝わってきた (平面) 波が角度 θ_i で物質 B と接している界面にやって

きたとしよう。物質 B の中では波長が変化するから、界面でちょうど波面が一致するためには B の中でどうしても波面の向きを変化させて伝わるしかない。このときは図からも分かるように、

$$\sin \theta_i = n_{ab} \sin \theta_t$$

という関係が成り立つ。これをスネルの法則という。ここで、 θ_t は屈折角である。物質 B 中で波長が長いと屈折は浅くなる方向に行く。もし、 B 中の波長が長くなってどうやっても界面で波面を合わせることができないときには、波は B 中を伝わるができずに、結局界面で反射されてしまう。これを全反射という。全反射されるぎりぎりの入射角度は B 中で波が界面に沿って進む場合として求めることができる。この角度を臨界角 θ_c といい、 $\theta_t = \pi/2$ (90°) として求められる (図 13)。

$$\sin \theta_c = n_{ab}$$

従って、全反射は波長が短い物質から長い物質に入るときに起きる現象である。

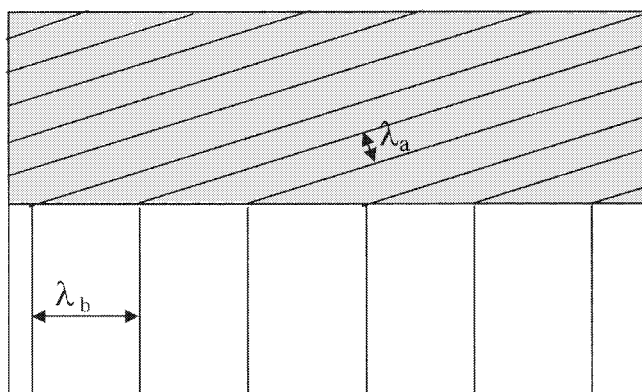


図 13: 屈折率の大きな物質から小さな物質に入射するとき、光の入射角が大きくなるとある角度で、物質 B 内で波面が立ってしまい、これ以上界面で一致させることができなくなる。この角度を臨界角といい、臨界角以上で光は全反射する。

屈折の法則は波長が変化するとして説明できるほかに、波の伝わる速さが異なる点に着目して説明することもできる。このときは少し想像力をたくましくして、波が媒質を伝わるというのは、伝わってきた波が空間のある点に作用してそこから新たに波を発生させる現象を使っているのだと考えるのである。これをホイヘンスの原理という。真空中を平面波が伝わる場合も、空間の 1 つ 1 つの点から新たに発生した波が球面波として発生しているのだと考えるのである。いくつもの点から発生した球面波は重なりあってあたかも平面波のようになり伝わっていく。

界面でも同じ様なことが起こる。物質 A から物質 B へ入ってきた波は界面の 1 つ 1 つの点で球面波をつくるのだが、 B の中では波の進む速さが異なるので、 A の中とは大きさの異なる半球を描いて波紋が広がる。平面波が界面に対して斜めに入ってきたときには界面に到達する時間が場所により少しずつずれるので、その分だけ界面から発せられた球面波の波紋の大きさは異なる。この半球が重なり合って 1 つの波面を作り出すと考えるのである。図 14 のように発生した波の方向が波の入ってきた方向とずれていることが分かる。このときの波の進む方向については上で述べたスネルの法則が成り立つ。この二つの考えは、上の例では波長が異なることを用い、下の例では速さが異なることを用いただけでどちらも同じ考え方によっている。

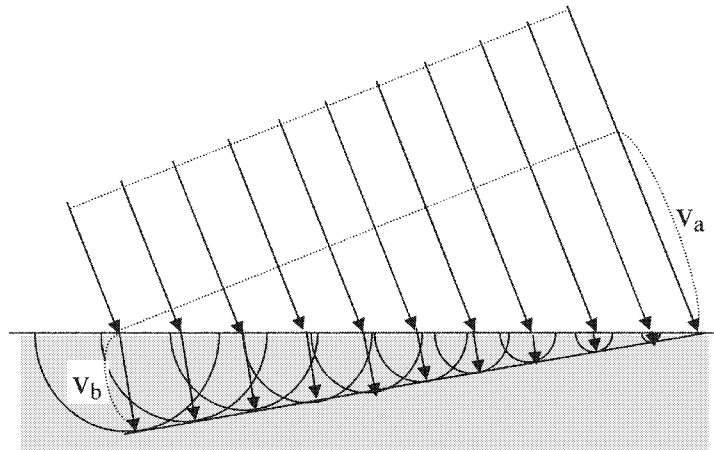


図 14: ホイヘンスの原理を用いて屈折を説明する。

屈折率は一般に波の振動数で違った値をとり、これを屈折率分散と呼んでいる。プリズムで虹色の光ができるのは、プリズムで屈折する光が色によって屈折角が異なることによっている。この現象は宝石の色や鉱物の色と関係していたり、また、鉱物を偏光顕微鏡で見たときにきれいな色が付く原因にもなっていて、構造色の一つの機構といえるだろう。屈折率分散の原因は、紫外部での光の吸収帯の存在が原因となっている。ほとんどの物質は紫外部に吸収帯をもっているの、可視域では波長が短くなるにつれ、一般に屈折率は大きくなっていく。これを正常分散といって、ガラスなどの透明物質で成り立っている。この領域では、振動数 ν の光の屈折率は次のセルマイヤーの分散公式で表されることが知られている。

$$n^2 - 1 = \sum_k \frac{\rho_k}{\nu_k^2 - \nu^2}$$

ここで、 k はそれぞれの吸収帯に対応していて、 ρ_k と ν_k は屈折率に対する吸収帯 k の寄与の大きさと吸収帯の中心振動数を表すパラメータである。可視光領域のいくつかの波長で屈折率が分かっている場合、その値を使ってこれらのパラメータを決定すると任意の波長での屈折率を求めることができる。光の吸収帯に近い場合は屈折率分散は複雑になり、逆に短波長にいくほど屈折率が小さくなる現象も見られる。これを異常分散と呼んでいる。図 15 には重い原子核に軽い電子がばねでつながれ、それに光が当たって強制振動しているとしたローレンツモデルを用いて計算した屈折率を示す。屈折率が κ が最大になる吸収の中心に向かって増大し（正常分散）、吸収帯付近で異常分散を示すことが良く表されている。このように吸収がある場合には κ が 0 でなくなり、屈折率は複素数で表されるようになる。屈折率が 1 より小さくなっているのは、分極が他の分極に及ぼしている電場の効果を無視しているためである。

屈折や全反射が一番良く分かるのは、光の場合である。風呂につかって自分の手を見ると指が短くなっているような気がする。これは光の屈折を用いて説明することができる。短く見えるのは人の目には光がまっすぐ進んでくると感じてしまうからである。全反射を体験するにはプールに入って一度潜ってみよう。そうして遠くの水面を見上げると、水面が鏡のようになるのを体験することができる。これは水の中を伝わってきた光が全反射によって外にでられず水面で反射しているためである。自然現象の中でも屈折が関係した現象は多い。しんきろうや逃げ水といった現象がそれである。しんきろうは砂漠の中で遠くの景色が浮かび上がって見える現象だが、これは太陽により暖められた空気が地表近くでは膨張して屈折率が小さくなるので、遠くからの景色は屈折し、あたかも浮かび上がっているように見えるのである。このほかにも、太陽が沈むときに形がゆがんで見えることやかげろうが立っているときにゆらゆら揺れて見える現象なども空気の屈折率が場所によって異なることによる屈折現象として説明することができる。

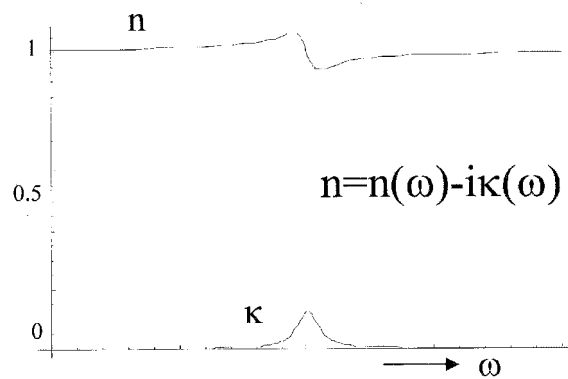


図 15: ローレンツモデルを用いた複素屈折率の計算結果

6) 光の反射

光が屈折率の異なる物質に入るときには屈折と同時に反射も起きる。反射される波の方向もホイヘンスの原理を用いて表すことができる。図 16 に示すように、屈折の場合と同じように界面の各点から発せられた球面波は重なり合って、反射する波の波面を作り上げている。屈折と異なるのはその半径が物質 A の中での速さに従うという点である。従って、その方向は界面に垂直な法線に対して対称に入射角 θ_i と同じ角度で反射していく。反射される波の位相はどうなるだろう。このときはローブを伝える波と同じような現象が起きる。もし、物質 A より物質 B の方が波の速が遅い場合、つまり、屈折率 $n_{ab} > 1$ の場合には位相が反転して反射される。これに対して、波の速さが速い場合 ($n_{ab} < 1$) には位相は反転されない。

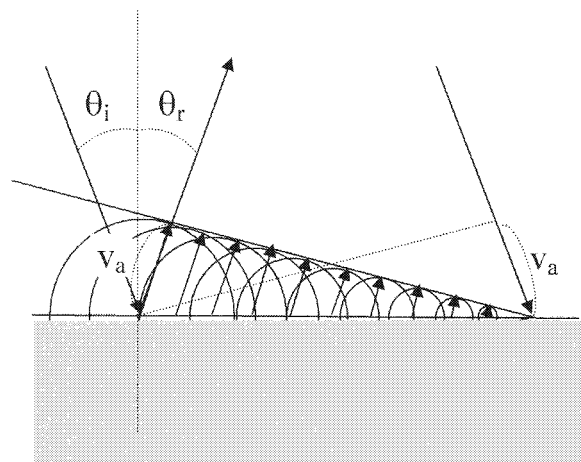
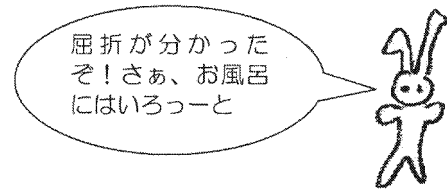


図 16: ホイヘンスの原理を用いた反射の説明

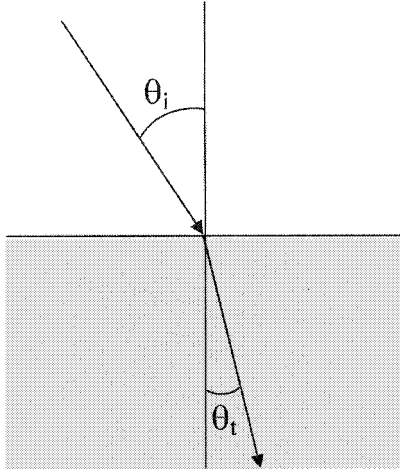


図 17: 入射角と屈折角

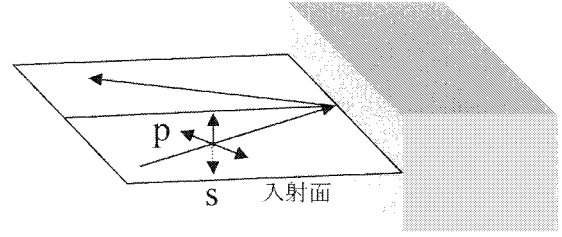
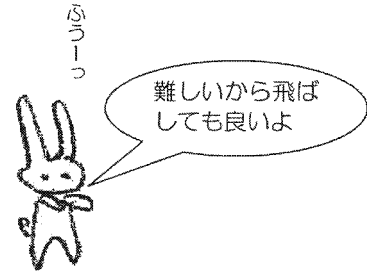


図 18: 入射面と偏光の説明

次に、一様な物質から屈折率の異なる物質に光が入射するときに、反射や屈折光の強度はどうなっているのだろうか。そこで、図 17、18 に示すように、屈折率 n_a の物質から屈折率 n_b の物質へ平坦な界面を介して平面波が角度 θ_i で入射している場合を考える。入射光と反射光を含む面を入射面と呼ぶが、光の電場がこの面に垂直に振動しているか平行に振動しているかで事情が少し異なってくる。垂直な場合を s 偏光、平行な場合を p 偏光と呼んでいる。垂直と平行をそれぞれ $\perp$ 、 $\parallel$ と書けば、入射光の振幅を 1 としたときの反射光と屈折光の振幅（振幅反射率 R と振幅透過率 T ）は、界面における電場と磁場の接続条件から求めることができ、次のフレネルの公式で表される。



$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= -\frac{n_a \cos \theta_t - n_b \cos \theta_i}{n_a \cos \theta_t + n_b \cos \theta_i} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \\ T_{\parallel} &= \frac{2n_a \cos \theta_i}{n_b \cos \theta_t + n_a \cos \theta_i} \\ R_{\perp} &= \frac{n_a \cos \theta_i - n_b \cos \theta_t}{n_a \cos \theta_i + n_b \cos \theta_t} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \\ T_{\perp} &= \frac{2n_a \cos \theta_i}{n_a \cos \theta_i + n_b \cos \theta_t} \end{aligned} \quad (1)$$

垂直入射の場合は s 偏光も p 偏光も同じになり、

$$R = \frac{n_b - n_a}{n_b + n_a}, \quad T = \frac{2n_a}{n_b + n_a}$$

となる。ここで、 $n_{ab} = n_b/n_a$ である。また、強度反射率 $\mathcal{R}$ 、強度透過率 $\mathcal{T}$ はそれぞれ、

$$\mathcal{R} = |R|^2, \quad \mathcal{T} = \frac{n_b \cos \theta_t}{n_a \cos \theta_i} |T|^2$$

で表され、エネルギー保存則 $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$ を満足する。強度透過率で $|T|^2$ の前にある因子は物質 A と物質 B で光速が異なることによる強度変化を補正する因子である。 p 偏光での反射 ($R_{\parallel}$) で、 $\theta_i + \theta_t = \pi/2$ のと

きは、分母が発散して、 $R_{\parallel} = 0$ になるが、この関係を満足する入射角をブリュースター角といって、レーザー発振器の中にガラスなどを挿入するときに良く用いられている性質である。この角度は、入射光により物質 B 中で生成される分極の向きがちょうど反射光の方向と一致したときに対応している。

フレネルの式を用いると全反射についてもいろいろな知見を得ることができる。まず、スネルの法則から

$$\sin \theta_t = \frac{\sin \theta_i}{n_{ab}} \equiv \alpha$$

を得るが、 $n_{ab} < 1$ で θ_i が大きくなると、 $\alpha > 1$ となることがある。こうなると、それを満足する θ_t は実数の範囲ではなくなってしまう。この場合は、

$$\cos \theta_t = \pm \sqrt{1 - \alpha^2} = \pm i \sqrt{\alpha^2 - 1}$$

として、 $\cos \theta_t$ は複素数で表される。界面から離れた距離で振幅が発散しない条件から $+$ 符号だけを取り、フレネルの式に代入すると

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= \frac{n_{ab} \cos \theta_i - i \sqrt{\alpha^2 - 1}}{n_{ab} \cos \theta_i + i \sqrt{\alpha^2 - 1}} \\ R_{\perp} &= \frac{\cos \theta_i - i n_{ab} \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\cos \theta_i + i n_{ab} \sqrt{\alpha^2 - 1}} \end{aligned} \quad (2)$$

となる。この二つの式は共に $(a - bi)/(a + bi)$ という形をしているので、強度反射率は $|(a - bi)/(a + bi)|^2 = 1$ となることが分かる。これが上で述べた全反射である。また、 $\sin \theta_i / n_{ab} = 1$ となる入射角が臨界角である。全反射のときの振幅反射率を計算すると

$$R_{\parallel} = e^{-2i\phi_{\parallel}}, \quad R_{\perp} = e^{-2i\phi_{\perp}}$$

となり入射波と反射波の間に位相のずれが見られることが分かる。それぞれの位相差は

$$\tan \phi_{\parallel} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{n_{ab} \cos \theta_i}, \quad \tan \phi_{\perp} = \frac{n_{ab} \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\cos \theta_i}$$

で与えられる。全反射の場合、光は界面で反射されるだけでなく、物質 B の中にも侵入し、界面に沿って少し進んだ後に反射すると考えられており、上の位相差は物質 B 内で進行する時間に対応している。この効果による位相シフトは Goos-Hänchen シフトと呼ばれている。全反射における反射波の位相変化を利用して、 s 偏光と p 偏光を共に含むような偏光状態（つまり 45 度方向に偏光）の光を全反射させて円偏光をつくる素子としてフレネルロムがある。全反射したとき、物質 B 中の光は

$$\exp \left\{ -i\omega(t - \alpha x/v_b) - (\omega z/v_b) \sqrt{\alpha^2 - 1} \right\}$$

のような形をしていて、界面に平行な x 方向については係数 α だけ遅く進むが、深さ方向には伝播せず指数関数的に減衰するような光の場を与えている。 z 方向への侵入する深さは $z_0 = v_b/(\omega \sqrt{\alpha^2 - 1})$ で与えられ、このような伝播できずにいる光をエバネッセント光と呼んでいる（図 19）。侵入深さ z_0 は α 、すなわち入射角を大きくすれば小さくなり、光の波長より十分小さくなる。エバネッセント光を用いると界面のごく近くの現象を見ることが可能で、近接場分光法として広く用いられている。

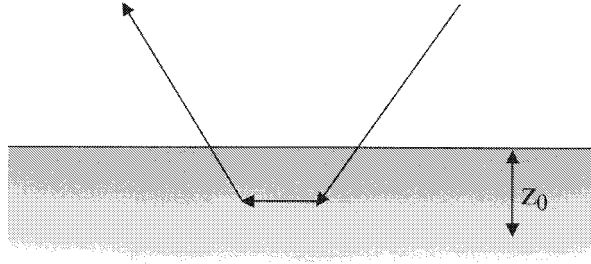


図 19: 全反射した光の経路を模式的に描く。

物質 B が金属の場合は、屈折率を $n_b = n(1 + i\kappa)$ のように複素数において、フレネルの公式を用いることができる。複素屈折率の物質に光が入射すると屈折率の虚数部分のため、物質 B の中で減衰する。金属の場合は κ が大きいため表面で急速に減衰し、光は表面付近でしか存在することができない。これを表皮効果と呼び、 $d \equiv c/(\omega n\kappa)$ を侵入距離という。全反射の時と同様に

$$\sin \theta_t = \frac{1}{n_{ab}} \sin \theta_i$$

とすると $\sin \theta_t$ は複素数となる。このことを用いると金属中の光は

$$\exp \left\{ i\omega \left(\frac{n_a x \sin \theta_i + z \sqrt{n^2(1 + i\kappa)^2 - n_a^2 \sin^2 \theta_i}}{c} - t \right) \right\}$$

となる。指数部の () 内の実部は x と z の二つの座標で表されるのに対し、虚部は z だけで表される。このことから、実部に関係した等位相面と虚部に関係した等振幅面は異なった向きをしていることが分かる (図 20)。フレネルの公式に代入すると

$$R_{\parallel} = \frac{n_a \sqrt{n^2(1 + i\kappa)^2 - n_a^2 \sin^2 \theta_i} - n^2(1 + i\kappa)^2 \cos \theta_i}{n_a \sqrt{n^2(1 + i\kappa)^2 + n_a^2 \sin^2 \theta_i} - n^2(1 + i\kappa)^2 \cos \theta_i} \equiv \rho_{\parallel} e^{i\gamma_{\parallel}}$$

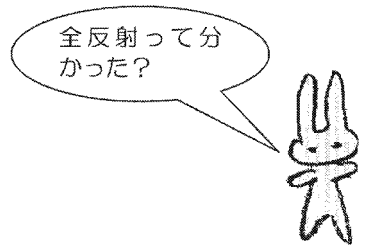
$$R_{\perp} = \frac{n_a \cos \theta_i - \sqrt{n^2(1 + i\kappa)^2 - n_a^2 \sin^2 \theta_i}}{n_a \cos \theta_i - \sqrt{n^2(1 + i\kappa)^2 + n_a^2 \sin^2 \theta_i}} \equiv \rho_{\perp} e^{i\gamma_{\perp}}$$

となり、全反射と同様、反射による位相の変化があり、また、 s 偏光と p 偏光では結果が異なっている。したがって、斜入射の場合で両方の偏光成分を含む入射光が入った場合には、偏光面が回転し楕円偏光になることが分かる。垂直入射に近い場合は、さらに簡単に表すことができ、

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \approx \frac{\theta_i - \theta_t}{\theta_i + \theta_t} \\ &= \frac{n(1 + i\kappa) - n_a}{n(1 + i\kappa) + n_a} = -R_{\perp} \end{aligned} \quad (3)$$

となる。

$$R_{\parallel} = -R_{\perp} = \rho e^{i\gamma}$$



とおくと、次のように位相変化を簡単に求めることができる。

$$\gamma = -\tan^{-1} \frac{2n\kappa}{(n+n_a)\kappa - n\kappa^2}$$

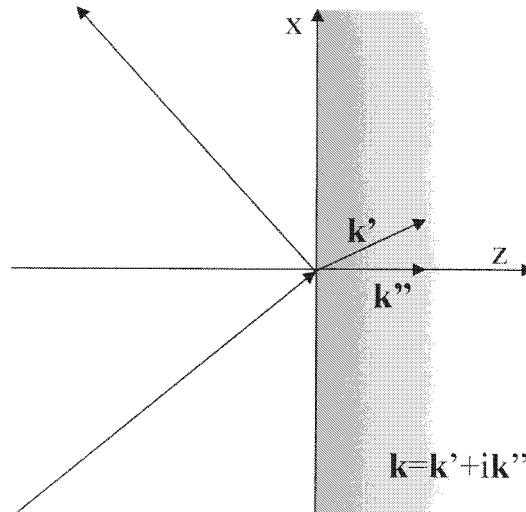


図 20: 金属などの吸収物質へ光が入射すると等位相面 (k') と等強度面 (k'') とは方向が異なる。

7) レンズと光線行列

屈折を利用したものにレンズがある。レンズは主に光を集めたり広げたりするのに使われるが、超音波のような音波に対しても使われることがある。凸レンズは中心部が厚いレンズだが、平面波が入射すると中心部を通る波は屈折率の大きいレンズの媒質中を通るため遅れてしまう。一方、周辺部ではレンズは薄いので波は遅れずに来る。従って凸レンズを通った後は、中心の波面は遅れ、周辺が進んだ球面波になる。球面波は次第に半径を小さくしてついには焦点を結ぶことになる。どれだけ中心部分で波面が遅れるかはレンズの厚さによるが、厚いほど波面の遅れは大きく、その結果、レンズ透過直後の球面波の半径は小さくなり、早く焦点を結ぶ。薄いレンズの場合、平面波を入れたときにレンズの中心から焦点までの距離を焦点距離といい f で表す。

レンズでどのような像ができるかは、幾何学的に求めることができる。図 21 のように凸レンズから a だけ離れた所にある像から発せられた光はレンズから b だけ離れた場所に逆向きの像をつくる。このとき、

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

という関係が成り立つ。これをレンズの公式という。もとの光源の大きさに対する像の大きさを倍率というが、図 21 より $M = b/a$ として求められる。像が凸レンズから f 以内の距離に置かれた場合には像をつくることができない。このとき、レンズに目を近づけてみると実物より大きな像を見ることができる。これはあたかも大きな像が b の位置に置かれているように目では感じてしまうためである。このように実際にはないが目では見えてしまう像を虚像といっている。これに対して、最初に述べたような像はそこにスクリーンを置けば見ることができるので、実像といっている。焦点距離の外に光源をおいたときの凹レンズも虚像を

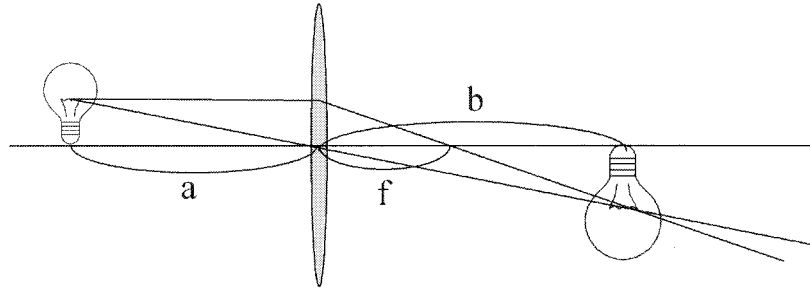


図 21: レンズの公式の説明

つくる。元の像と虚像の位置の間には $1/a - 1/b = 1/f$ の関係が成り立つが、凸レンズでできる像の位置を正にとり反対側を負とすることで、凸レンズと同じレンズの公式で表すことができる。顕微鏡や望遠鏡は対物レンズでつくられた実像を接眼レンズで虚像としてみることで、像を拡大してみることができる装置である。

レンズが何枚も組み合わせられた光学系だと幾何学的に求めるのは非常に大変な作業になる。こんなときには次に紹介する光線行列（または、 $ABCD$ 行列）の方法が大変役に立つ。光線行列では光を線として扱い、中心軸からの距離 r と傾き $r' \equiv \tan \theta$ の二つを要素とする行列として表す。このとき、光は中心軸から余り大きく傾くことはないとする近軸光線を仮定して、 $\tan \theta \sim \sin \theta \sim \theta$ の関係が成り立つとする。例えば、図 22 のように点 1 にいた光が d だけ離れた点 2 に移動する場合は

$$r_2 = r_1 + r'_1 d, \quad r'_2 = r'_1$$

という関係式になるが、これを行列で表すと

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix}$$

となる。次に、屈折率 n_1 の媒質から屈折率 n_2 の媒質に光が入るときには、スネルの法則から $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ が成り立つが、近軸光線の近似から $n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$ が成り立ち、

$$r_1 = r_2, \quad n_1 r'_1 = n_2 r'_2$$

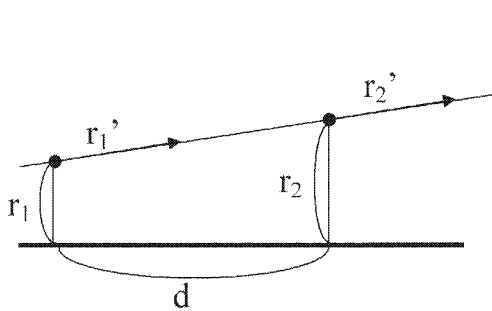


図 22: 光線行列による並進の説明

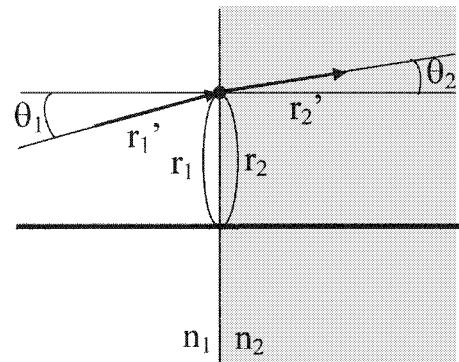


図 23: 光線行列による屈折の説明

となる (図 23)。行列で表すと、

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1' \end{pmatrix}$$

となる。いろいろな場合の光線行列をまとめたものを図 24 に示す。

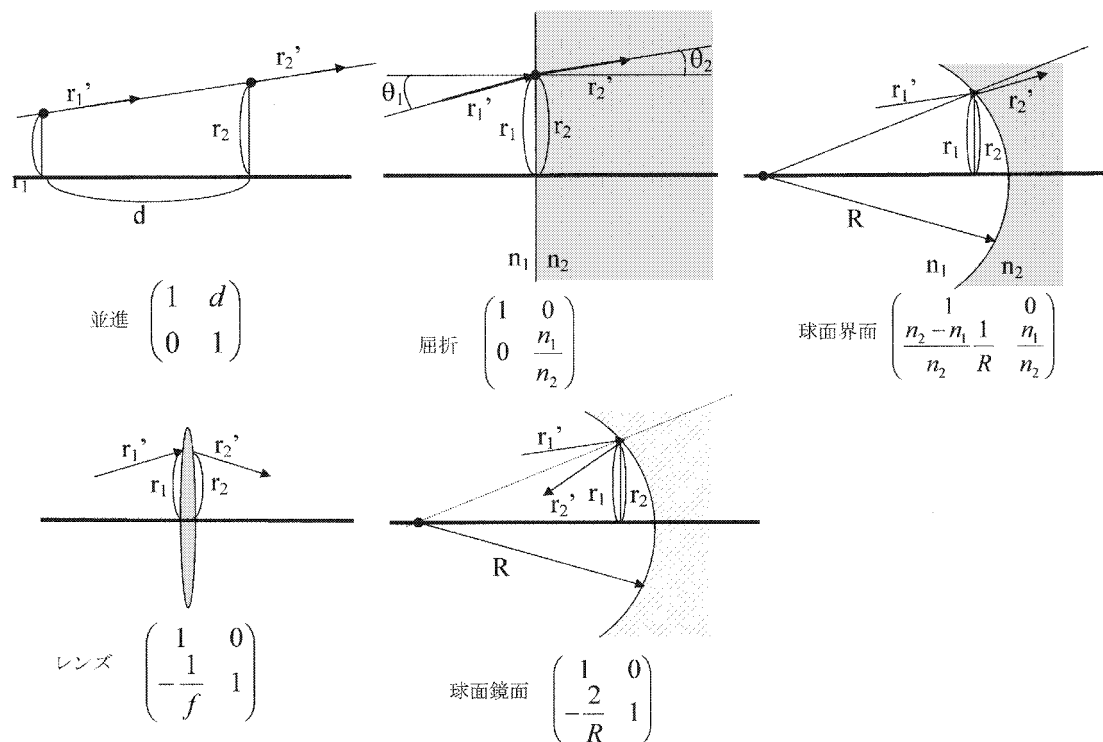


図 24: いろいろな光線行列

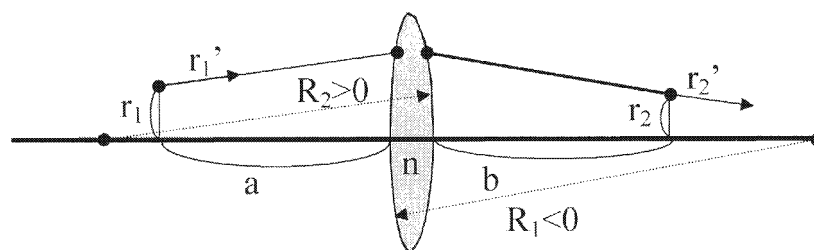


図 25: 光線行列によるレンズの公式の導出



光線行列ってけっこう便利かも！

例として、薄肉レンズによる結像を求めてみよう（図 25）。点 1 から出た光が、 a だけ並進し、その後、二つの球面界面を通った後、 b だけ並進すると考える。このとき、点 1 を出た光が光の向き、すなわち、 r'_1 に拘わらず、点 2 を通れば結像したということになる。レンズの厚みは十分薄くその間の並進は無視することとする。そうするとレンズに入る前の位置と出た後の位置は等しくなり、計算すると次のような関係式が得られる。

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R_2} & \frac{n}{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{n} \left(-\frac{1}{R_1}\right) & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix}$$

ここで、 R_1 と R_2 はレンズの曲率半径を表し、レンズ媒質とそれ以外の屈折率をそれぞれ n 、 1 としている。右辺の左から 2 番目と 3 番目の行列の積を計算すると、2 つの曲面ではさまれたレンズの光線行列を求めることができ、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R_2} & \frac{n}{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{n} \left(-\frac{1}{R_1}\right) & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

と表される。ここで、

$$f \equiv \frac{1}{n-1} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

は焦点距離になる。このことは、

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix}$$

を計算することにより、

$$r_2 = \left(1 - \frac{b}{f}\right) r_1 + \left\{a + \left(1 - \frac{a}{f}\right) b\right\} r'_1$$

という式が得られるが、 r_2 が光の出射方向によらず一定になるという条件を用いると、第二項は r'_1 の如何に拘わらず 0 にならなくてはならない。そのためには係数が 0 でなくてはならず、

$$a + \left(1 - \frac{a}{f}\right) b = 0$$

が成り立つことが必要である。この式を計算すると上記のレンズの公式が得られる。

また、 $r_2 = (1 - b/f)r_1 = -(b/a)r_1$ となり、倍率が b/a になること、像が反転することを示すことができる。このように、光線行列は光路にある素子の作用を次々と行列の形で表していき、その積を計算することで複雑な光学系でも計算でき、レーザー共振器の安定性の解析などに良く用いられている。

おめでとう、おしまいまで来たね



（つづく）